

Entfernungsmoduln ferner Supernovae: Ausschluß der Steady-State-Theorie

D. Walker

30. November 2013

Zusammenfassung

Die Entfernungsmoduln ferner Supernovae werden mit den Vorhersagen der Steady-State-Theorie und des Konkordanz-Modelles verglichen. Ebenfalls gezeigt werden Vorhersagen auf der Basis des Einstein–de-Sitter-Modelles sowie eines vierten Modelles, das nur Materie und keine Vakuum-Energie enthält. Die Steady-State-Theorie und das Einstein–de-Sitter-Modell lassen sich durch den vorgenommenen Vergleich ausschließen.

Einleitung

In meinem Vortrag *Gab es den Urknall?*, den ich am 8. November 2013 in der Sternwarte Lübeck hielt, zeigte ich anhand zweier Diagramme, daß das Steady-State-Modell Fred Hoyles nicht den beobachteten Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und Leuchtkraftentfernung ferner Supernovae wiedergibt. Daher muß diese Alternative zu den Friedmann-Lemaître'schen Urknall-Modellen, allein schon aus diesem Grund, wohl ausgeschlossen werden. Nach dem Vortrag wurde ich von interessierten Hörern angesprochen, ob ich ihnen diese Diagramme nicht zukommen lassen könne. Das soll hiermit geschehen.

In die Abbildung 2 habe ich gerechnete Ergebnisse für zwei weitere kosmologische Modelle zusätzlich aufgenommen, während die Abbildung 3 im wesentlichen so geblieben ist, wie ich sie im Vortrag zeigte.

Neu hinzugekommen ist die Abbildung 1. Hier habe ich mich davon überzeugt, daß der Entfernungsmodul naher Supernovae als Funktion der Rotverschiebung durch alle vier hier betrachteten kosmologischen Modelle gut wiedergegeben wird, wenn man der Hubble-Konstanten den Wert $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ zuordnet. Mit dem „kanonischen“ Wert, $71 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, erhält man hier eine wesentlich schlechtere Übereinstimmung (\rightarrow Abb. 1.). Dies hat mich veranlaßt, die Abbildungen 2 und 3 zu überarbeiten. Die im Vortrag gezeigten Kurven galten für $H_0 = 71 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, nun habe ich sie alle für diesen Text für $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ neu gerechnet.

1 Entfernungsmodul in der Kosmologie

Wir kennen den Entfernungsmodul, die Differenz aus scheinbarer m und absoluter Helligkeit M , aus den Lehrbüchern:

$$m - M = -5 + 5 \lg \frac{r}{1 \text{ pc}} \quad , \quad (1)$$

dabei bedeutet r die Entfernung des Objektes. Der Nenner 1 pc bedeutet, daß diese Entfernung in Parsec eingesetzt wird. In der Kosmologie gibt es zwei wichtige Unterschiede hierzu:—

1. Entfernungen werden in Mpc gemessen. Dadurch wird aus der -5 eine 25.
2. Anstelle der Entfernung r steht die „Leuchtkraftentfernung“ D_L . Die Leuchtkraftentfernung ist um den Faktor $(1+z)$, z = Rotverschiebung, größer als die wahre, „metrische“, Entfernung, was durch die Expansion des Weltalls und den damit einhergehenden Energieverlust durch Rotverschiebung und Verringerung der Photonendichte verursacht wird. Eine Plausibilitätsbetrachtung hierzu findet der geneigte Leser in dem dritten Teil meiner Serie *80 Jahre expandierendes Weltall*, die in der POLARIS* erschienen ist.

Der Entfernungsmodul, der im folgenden betrachtet wird, ist also durch die Gleichung

$$m - M = 25 + 5 \lg \frac{D_L}{1 \text{ Mpc}} \quad (2)$$

gegeben.

Weltmodelle erlauben die Berechnung der Leuchtkraftentfernung D_L einer Supernova als Funktion ihrer Rotverschiebung. Dabei muß berücksichtigt werden, daß sich das Weltall kontinuierlich ausdehnt, während das Licht zu uns unterwegs ist, und daß sich die Geschwindigkeit der Ausdehnung, also die Hubble-„Konstante“, mit der Zeit ändert. Hierzu muß ein Weltmodell zugrunde gelegt werden.

Aus der Berechnung der Leuchtkraftentfernung einer Supernova für ein bestimmtes Weltmodell erhält man aus der Gleichung (2) eine Vorhersage ihres Entfernungsmodules $m - M$. Da sich—andererseits—aus der Lichtkurve einer Supernova des Typs Ia ihre absolute Helligkeit M erschließen läßt [Riess et al.],[†] kennt man mit der Messung ihrer scheinbaren Helligkeit m zugleich den *tatsächlichen* Wert ihres Entfernungsmoduls. So läßt sich durch den Vergleich der gemessenen Werte mit den berechneten entscheiden, ob ein Weltmodell realistisch ist oder nicht.

Die berechnete Leuchtkraftentfernung in Gleichung (2) hängt von der Hubble-Konstanten H_0 ab sowie von dem jeweils gewählten Weltmodell. Interessanterweise lassen sich diese beiden Abhängigkeiten trennen, indem man die Hubble-Länge

*POLARIS Nr. 81 (1/2011).

[†]A. G. Riess et al.: AJ, **116**, 1009 (1998).

c/H_0 , c = Lichtgeschwindigkeit, herauszieht. Die Gleichung (2) läßt sich dann anschreiben in der Form

$$\begin{aligned} m - M &= 25 + 5 \lg \frac{c}{H_0 \cdot 1 \text{ Mpc}} + 5 \lg \{(1 + z) I_{\Omega_m, \Omega_\Lambda}(z)\} \\ &= 42.3841 - 5 \lg h + 5 \lg \{(1 + z) I_{\Omega_m, \Omega_\Lambda}(z)\} \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

h ist die relative, auf $100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ bezogene, Hubble-Konstante, also $H_0 = h \cdot 100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, während die Funktion $I_{\Omega_m, \Omega_\Lambda}(z)$ von dem gewählten kosmologischen Modell und der Rotverschiebung, *aber nicht von der Hubble-Konstanten*, abhängt (\rightarrow Anhang). Wir sehen:

1. Der Wert der Hubble-Konstanten schiebt die Kurven in den Abbildungen *jeweils im ganzen* nach oben oder unten, aber ändert deren Form nicht.
2. Der Verlauf der Kurven selbst ist durch das jeweils gewählte Weltmodell, insbesondere durch die *Dichte der Materie*, Ω_m , und die *Dichte der Vakuumenergie* („Dunkle Energie“), Ω_Λ , gegeben.

Für weitere Details wende sich der geneigte Leser an den Verfasser.

2 Die betrachteten Modelle

Zu den in meinem Vortrag gezeigten Diagrammen (Steady-State, Konkordanzmodell) habe ich zwei weitere Modelle hinzugefügt: das Einstein–de-Sitter–Modell und eines, das nur wenig Materie und keine Vakuumenergie enthält. Im einzelnen:—

Nur Materie, keine Vakuumenergie. Hier ging ich davon aus, daß die Dichte der Materie (incl. Dunkler Materie) ca. 25 % der kritischen Dichte ausmacht und keine Vakuumenergie vorhanden ist. Ich wählte $\Omega_m = 0.24$ (um mit dem Konkordanz-Modell, siehe unten, im Einklang zu sein, aber das macht, was die Ergebnisse angeht, keinen großen Unterschied zu $\Omega_m = 0.25$ aus) und $\Omega_\Lambda = 0$, d. h. keine Vakuumenergie. Solch ein Modell gibt eine ewig expandierende Welt („offenes“ Universum), und der Raum in ganzen ist negativ gekrümmt, wie eine Sattelfläche. In den Abbildungen sind die zugehörigen Kurven gestrichelt.

Konkordanz-Modell. Dieses Modell heißt so, weil es (bislang) mit allen Beobachtungsdaten (also auch mit Vermessungen der 2.7 K-Hintergrundstrahlung) im Einklang ist. Laut Riess et al. (op. cit.) wird eine gute Anpassung an die Beobachtungsdaten durch die Annahme $\Omega_m = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$ erreicht. Diese Welt besteht mithin zu ca. $\frac{1}{4}$ aus Materie (normale + dunkle) und zu ca. $\frac{3}{4}$ aus Vakuumenergie („Dunkle Energie“). Das Weltall ist im ganzen euklidisch, also nicht gekrümmt, da beide Dichteanteile zusammen 1, also die kritische Dichte, ergeben. Euklidisch bedeutet, daß der kürzeste Weg von A

nach B eine gerade Linie ist. Außerdem expandiert dieses Weltall mit Beschleunigung. In den Abbildungen habe ich meine Resultate mit Rauten \diamond gekennzeichnet, in Abb. 2 überdies eine durchgezogene Kurve hindurchgelegt. In Abb. 3 ist es die Nulllinie.

Einstein–de-Sitter–Modell. Auch dieses Modell ist euklidisch, enthält aber keine Vakuumenergie sondern nur Materie, wie das erste der betrachteten Modelle. Der Unterschied besteht jedoch darin, daß die Materiedichte hier nicht nur ca. 25 % der kritischen Dichte ausmacht, sondern gleich der kritischen Dichte selbst ist. Die mit diesem Modell erzielten Ergebnisse habe ich mit strichpunktierten Kurven dargestellt. Eine solche Welt expandiert so, daß sie gerade eben nicht wieder kollabiert.

Steady State. Dies ist Hoyles Modell eines Weltalls, das *zu allen Zeiten und an allen Orten* gleich aussieht. Von den hier betrachteten Modellen ist es das einzige, das *in allen vier Dimensionen* (Raum und Zeit) symmetrisch ist. Im Gegensatz zu den drei anderen gab es keinen Urknall. Diese Welt ist euklidisch und expandiert beschleunigt und zwar *exponentiell beschleunigt*, ist also ein inflationäres Universum. Das ist aber nur dann mit den Friedmann-Gleichungen und der Symmetrieforderung vereinbar, wenn ständig Materie neu entsteht, so daß die Gesamtdichte im Universum sich, trotz Expansion, nicht ausdünn. Die entsprechenden Kurven habe ich durch Kreise \circ dargestellt, in der Abb. 2 noch eine punktierte Kurve hindurchgelegt. In Abb. 3 wird es durch eine entsprechend beschriftete durchgezogene Kurve dargestellt.

3 Die Hubble-Konstante

In der Abb. 1 habe ich den besten Wert der Hubble-Konstanten ermittelt. Der Leser erinnere sich an Kapitel 1: die Hubble-Konstante beeinflusst nur die Lage der Kurven, nicht deren Verlauf. So kann man also die Kurven so lange hin- und herschieben, bis der beste Fit der gemessenen Daten erreicht ist. Ich war in dieser Beziehung faul, denn Riess et al. (op. cit.) haben das schon getan und fanden, daß $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ bzw. $h = 0.65$ am besten paßt. Der Leser sieht, wie schön das stimmt:—

Die gemessenen Entfernungsmoduln sind als Punkte eingetragen, meine gerechneten Ergebnisse für die vier Modelle als Kurven sowie als $\diamond \diamond$ und $\circ \circ$. Tatsächlich sind die Werte für $m - M$ um 30^m größer, als auf der y -Asche angegeben ist. Für $z \lesssim 0.03$ liegen alle Kurven aufeinander. Das muß so sein, denn die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen wirken sich erst beim Blick in die Vergangenheit, auf die Expansionsgeschichte des Weltalls also, aus. Aber dazu müssen wir das *ferne* Weltall anschauen, nicht, wie hier, das *nahe*. Im nahen Weltall, also in der Gegenwart, hängt das Ausdehnungsverhalten nur von dem heutigen Wert der Hubble-Konstanten H_0 ab.

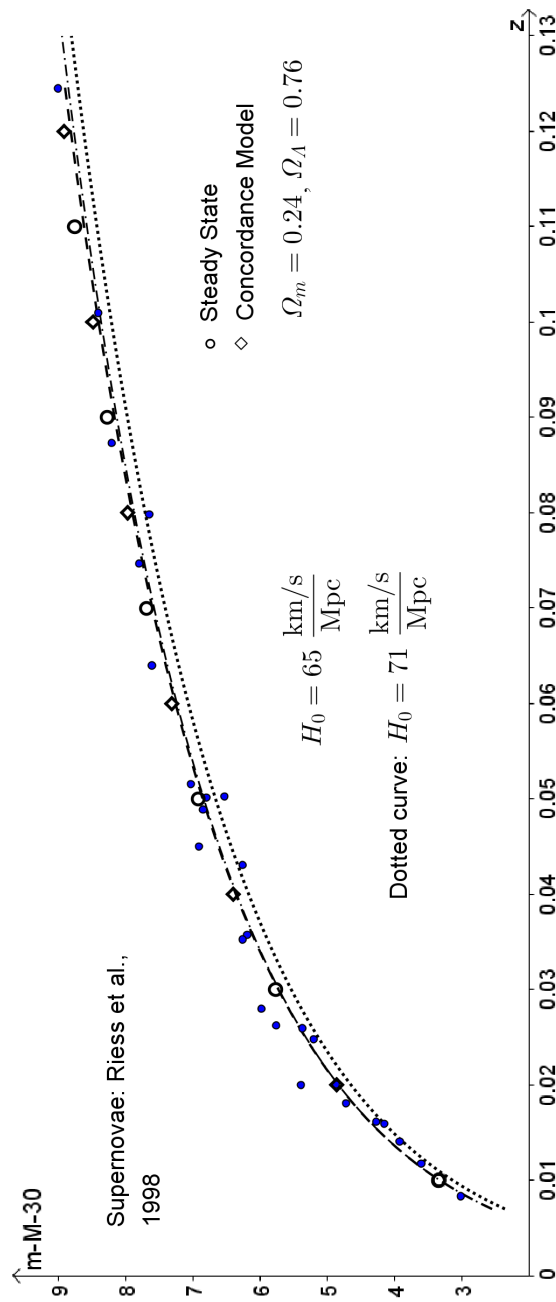


Abbildung 1: Entfernungsmoduln über Rotverschiebung für nahe Supernovae (Punkte ●) und Fits auf der Basis vierer Modelle:—Gestrichelte Kurve: negativ gekrümmtes Modell mit $\Omega_m = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0$.—Strichpunktigte Kurve: Einstein–de–Sitter–Modell. Ferner sind Resultate für das Konkordanz-Modell (◇) und die Steady-State-Theorie (○) gezeigt. In allen Fällen ist $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$. Die Kurven koinzidieren für $z \lesssim 0.03$. Für den „kanonischen“ Wert, $H_0 = 71 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, ist die Übereinstimmung nicht gut (punktigte Kurve).

Der Wert $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ weicht von dem „kanonischen“ $H_0 = 71 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ nach unten ab, aber das müssen wir hinnehmen. Der „kanonische“ Wert ist ein Ergebnis, in das auch andere Messungen (z. B. Hintergrundstrahlung) eingeflossen sind. Rechne ich mit $H_0 = 71 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, erhalte ich die punktierte Kurve in der Abb. 1, die, im Mittel, um $0^m 19 17$ unterhalb der Meßwerte liegt.

4 Supernovae mit hoher Rotverschiebung: Test der Modelle

In Abb. 2 sind Entfernungsmoduln ($m - M$) hochgradig rotverschobener Supernovae über ihren Rotverschiebungen z aufgetragen. Zusätzlich zu 1998 veröffentlichten Daten nahm ich weitere hinzu, die 2006/7 veröffentlicht wurden.[‡] Tatsächlich ist der jeweilige Entfernungsmodul um $43^m 13$ größer als der auf der y -Achse angegebene Wert. Diese „krumme“ Zahl ergibt sich, wenn man in Gleichung (3) für die Hubble-Konstante den „kanonischen“ Wert $h = 0.71$ einsetzt, mit dem ich ursprünglich angefangen hatte. Hier und jetzt verwende ich zwar $h = 0.65$, aber deshalb wollte ich die Zeichnung nicht ändern.

Die vier Kurven veranschaulichen die Vorhersagen, wie sie sich aus den einzelnen Modellen ergeben:—

Wenig Masse, keine Vakuumenergie. (Gestrichelte Kurve.) Die Entfernungsmoduln haben die Tendenz, kleiner zu sein als die gemessenen Werte. Außerdem scheint die Krümmung dieser Kurve nicht ganz auszureichen. Die Ergebnisse sind nicht sehr empfindlich gegen kleine Änderungen in Ω_m .

Konkordanz-Modell. (Durchgezogene Kurve mit Rauten.) Unter den vier betrachteten Modellen fittet diese Kurven die Meßwerte am besten.

Einstein–de-Sitter. (Strichpunktierte Kurve.) Die vorhergesagten Entfernungsmoduln sind unzweifelhaft zu klein, um realistisch zu sein.

Steady State. (Punktierte Kurve mit Kreisen.) Die vorhergesagten Werte sind zweifelsohne zu hoch.

In der Abb. 3 schließlich vergleiche ich die Abweichungen der tatsächlichen Entfernungsmoduln einerseits und der mit dem Steady-State-Modell berechneten andererseits von den mit dem Konkordanz-Modell berechneten. Auf der y -Achse ist also die Differenz $\Delta(m - M)$ des jeweiligen Entfernungsmoduls zu dem mit dem Konkordanz-Modell ausgerechneten aufgetragen. Die Nulllinie entspricht in dieser Darstellung daher den Vorhersagen des Konkordanz-Modelles. Diese Abbildung entspricht einer Folie, die ich während meines Vortrages *Gab es den Urknall?* zeigte. Hier allerdings legte ich den Wert $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ zugrunde, damals waren es 71.

[‡]Riess et al.: APJ, **659**, 98 (2007).

Steady-State and other Models vs. Concordance-Model

D. Walker - November 2013

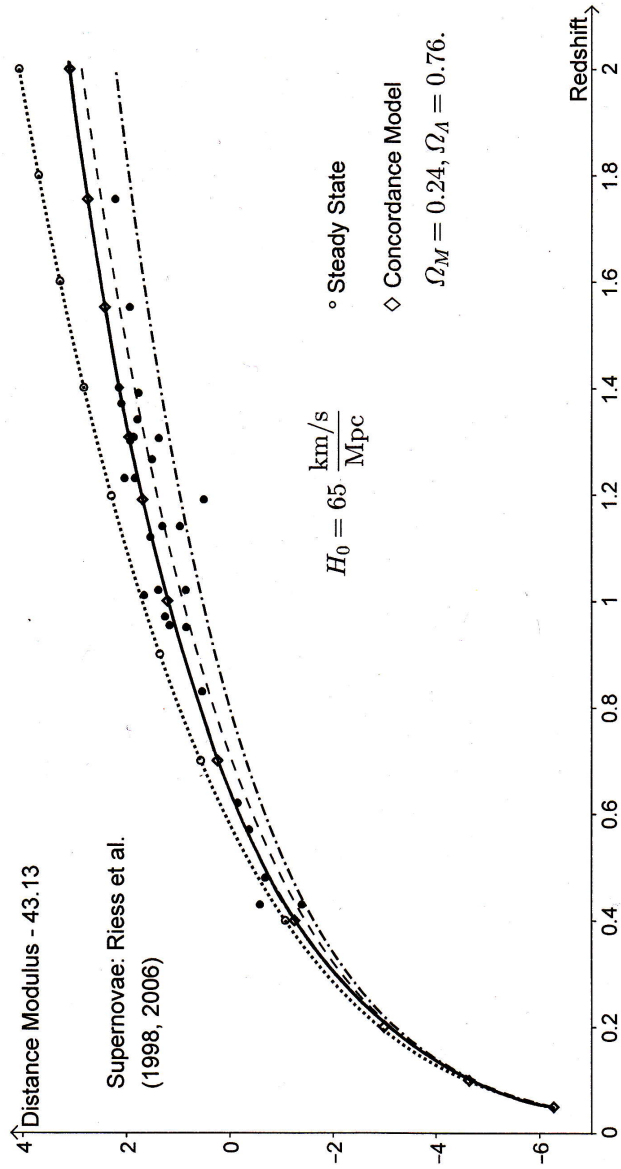


Abbildung 2: Entfernungsmoduln über Rotverschiebung hochgradig rotverschobener Supernovae (Punkte •) und Vorhersagen auf der Basis vierer Modelle:—Gestrichelte Kurve: negativ gekrümmtes Modell mit $\Omega_m = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0$.—Durchgezogene Kurve mit ◊: Konkordanz-Modell mit $\Omega_m = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$.—Punktierte Kurve mit ◦: Steady state.—Strichpunktierte Kurve: Einstein-de-Sitter-Modell. In allen Fällen ist $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$.

Steady-State minus Concordance Model

D. Walker - Nov. 2013

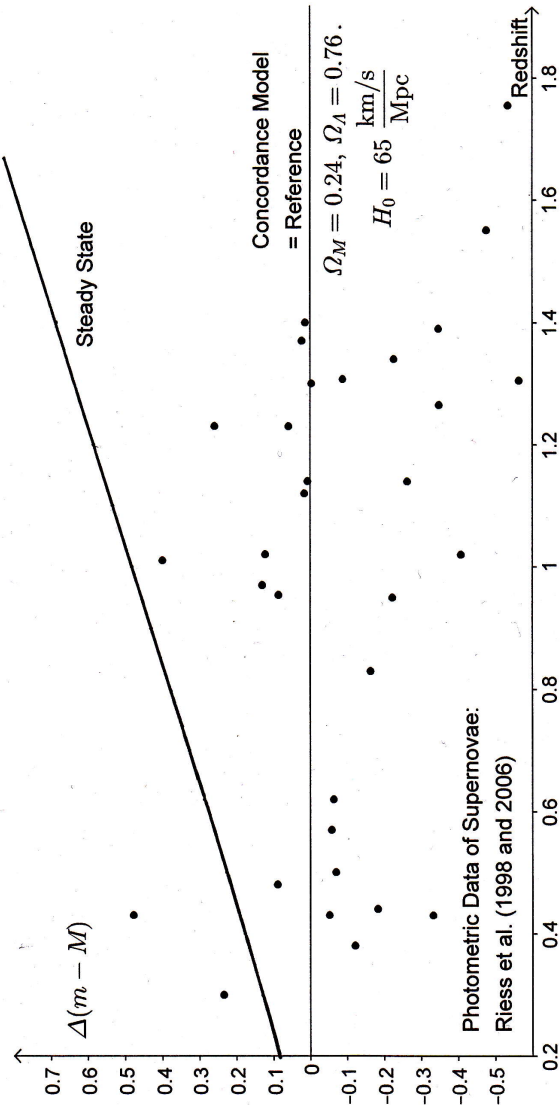


Abbildung 3: Abweichung der von dem Steady-State-Modell hervorgesagten Entfernungsmoduln von denen, die von dem Konkordanz-Modell vorhergesagt werden, aufgetragen über der Rotverschiebung (mit “Steady State” beschriftete Kurve). Die Punkte • geben die entsprechenden Abweichungen für tatsächliche, hoch rotverschobene Supernovae wieder. In dieser Auftragung entspricht die Nulllinie der Vorhersage auf der Basis des Konkordanz-Modelles mit $\Omega_m = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$. In beiden Weltmodellen ist $H_0 = 65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ gesetzt worden, im Einklang mit Abb. 1. Das Steady-State-Modell gibt die beobachteten Entfernungsmoduln nicht wieder, das Konkordanz-Modell schon.

Es ist deutlich, daß die tatsächlichen Entfernungsmoduln den Vorhersagen des Steady-State-Modelles nicht folgen.

Aus den Abbildungen 2 und 3 geht eindeutig hervor:—

|| Steady State und Einstein–de-Sitter können unzweifelhaft ausgeschlossen werden. Den besten Fit gibt das Konkordanz-Modell.

A Die Leuchtkraftentfernungen—explizit

Nur Materie, keine Vakuumenergie

Bei diesem Modell mit negativer Raumkrümmung wird die Leuchtkraftentfernung D_L als Funktion der Rotverschiebung z durch *Mattigs Formel*[§] gegeben:—

$$D_L = \frac{c}{H_0} \frac{2}{\Omega_m^2} \left\{ \Omega_m z + (2 - \Omega_m) \left(1 - \sqrt{1 + \Omega_m z} \right) \right\} . \quad (4)$$

Setzt man dies in die Gleichung (2) ein, erhält man für den Entfernungsmodul

$$\begin{aligned} m - M &= 25 + 5 \lg \frac{c}{H_0 \cdot 1 \text{ Mpc}} + \\ &+ 5 \lg \left\{ \frac{2}{\Omega_m^2} \left[\Omega_m z + (2 - \Omega_m) \left(1 - \sqrt{1 + \Omega_m z} \right) \right] \right\} \\ &= 42.384 - 5 \lg h + \\ &+ 5 \lg \left\{ \frac{2}{\Omega_m^2} \left[\Omega_m z + (2 - \Omega_m) \left(1 - \sqrt{1 + \Omega_m z} \right) \right] \right\} . \quad (5) \end{aligned}$$

Für die Hubble-Konstante wurde $H_0 = h \cdot 100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ eingesetzt, c ist die Lichtgeschwindigkeit und Ω_m die heutige Dichte der Materie im Weltall, bezogen auf die heutige kritische Dichte. Für die Rechnungen habe ich $h = 0.65$ und $\Omega_m = 0.24$ gesetzt.

Konkordanz-Modell

In diesem Modell ist die Leuchtkraftentfernung durch

$$D_L = (1 + z) \frac{c}{H_0} I(z)$$

gegeben, mit dem Integral

$$I(z) := \int_{x_e}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m x + \Omega_\Lambda x^4}} , \quad (6)$$

[§]W. Mattig: Astr. Nachr., **284**, 109 (1958), bzw., in der von mir verwandten Notation: M. S. Longair in *The Deep Universe*, Springer, 1995, Seite 387.

das numerisch berechnet werden muß. Dabei ist $x_e = 1/(1+z)$. Für kleine Rotverschiebungen ist

$$I(z) = \frac{1}{1+q_0} \left\{ \sqrt{1+2(1+q_0)z} - 1 \right\} \quad ,$$

mit dem „Verzögerungsparameter“

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda = \frac{0.24}{2} - 0.76 = -0.64 \quad ,$$

eine gute Näherung. Ω_m und Ω_Λ sind die heutigen Dichten von Materie und Vakuumenergie, jeweils auf die heutige kritische Dichte bezogen.

Setzt man all dies in die Gleichung (2) ein, so erhält man

$$m - M = 42.384 - 5 \lg h + 5 \lg \{(1+z)I(z)\} \quad . \quad (7)$$

Für jeden Wert der Rotverschiebung z habe ich das Integral $I(z)$ in der Gleichung (6) numerisch berechnet, dabei waren $\Omega_m = 0.24$ und $\Omega_\Lambda = 0.76$, und das Ergebnis, zusammen mit $h = 0.65$, in die Gleichung (7) eingesetzt.

Einstein–de-Sitter

Dies ergibt sich aus dem zuerst betrachteten Modell, indem in der Gleichung (5) $\Omega_m = 1$ gesetzt wird: das Einstein–de-Sitter–Modell enthält nur Materie, und diese besitzt genau die kritische Dichte. Der Entfernungsmodul ist gegeben durch

$$m - M = 42.384 - 5 \lg h + 5 \lg 2 + 5 \lg(1+z) + 5 \lg \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \quad . \quad (8)$$

Die Rechnungen wurden wieder mit $h = 0.65$ ausgeführt.

Steady State

In diesem Modell gilt einfach:[¶]

$$D_L = \frac{c}{H_0} z(1+z) \quad ,$$

so daß sich für den Entfernungsmodul ergibt

$$m - M = 42.384 - 5 \lg h + 5 \lg z(1+z) \quad . \quad (9)$$

Auch hier rechnete ich mit $h = 0.65$.

[¶]z. B.: S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology*, Wiley, 1972, Gl. [14.8.11], dort ist aber $c = 1$ gesetzt.